Fiche n°7 – La proportionnalité

Proportion de la moyenne géométrique

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ et $b = \sqrt{ac}$

Proportion arithmétique

$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = 1$ et $b = \frac{a+c}{2}$

L'égalité de deux rapports est une proportion (// fonctions linéaires ** cf. plus bas)

Exemple :

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$

a et **d** sont dits « **extrêmes** de la proportion » et **b** et **c** sont dits « **moyens** de la proportion ».
Une situation de proportionnalité met au moins 4 nombres sont en jeu.

Quatrième proportionnelle

On appelle quatrième proportionnelle aux 3 nombres a, b et c le nombre x tel que :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

On a : $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ équivaut à $ax = bc$

D'où $x = \frac{bc}{a}$

Cadre des fonctions linéaires

Les suites de nombres réels $(x_1 ; x_2 ; x_3 \ldots. x_n)$ et $(y_1 ; y_2 ; y_3 \ldots. y_n)$ sont proportionnelles s'il existe un réel **k** tel que :

$y_1 = kx_1$
$y_2 = kx_2$
…
$y_n = kx_n$

} **k** est le **coefficient de proportionnalité**

y_n est l'image de x_n par la fonction linéaire f définie par $\mathbf{f(x) = kx}$
A l'inverse : x_n est l'image de y_n par la fonction linéaire $\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{1}{k}x}$

Exemple :
Soit les deux suites de nombres proportionnelles :
$(2 ; 3 ; 4 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25)$ et $(\frac{4}{3} ; 2 ; \frac{8}{3} ; \frac{20}{3} ; 10 ; \frac{40}{3} ; t)$

On dispose les nombres dans un **tableau de correspondance** :

$X\ \frac{2}{3}$

2	3	4	10	15	20	25
$\frac{4}{3}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{20}{3}$	10	$\frac{40}{3}$	t

$X\ \frac{3}{2}$

Les fonctions linéaires associées sont :

$f(x) = \frac{2}{3}x$ et $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x$

Propriété additive

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Démonstration

$f(2+3) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{10}{3} = f(5)$ donc $f(2+3) = f(2) + f(3)$

Propriété multiplicative

$f(ax) = af(x)$

Démonstration

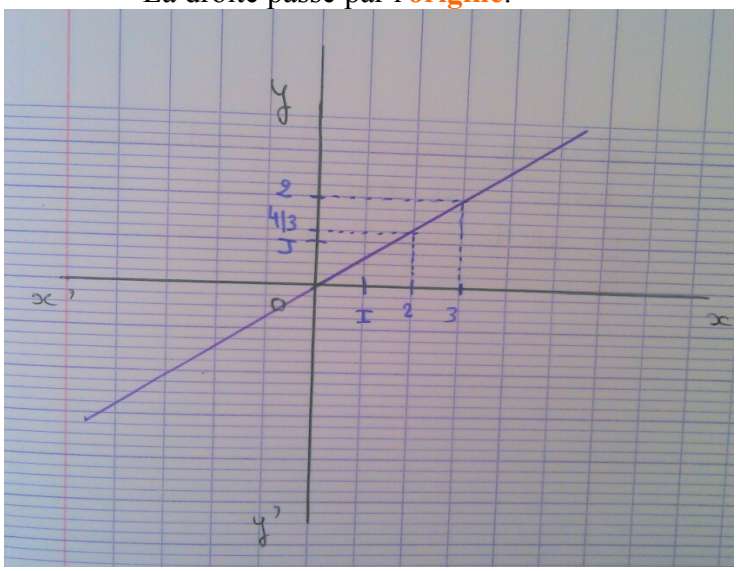
$f(2 \times 5) = f(10) = \frac{20}{3}$

et $2f(5) = 2 \times \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$ donc $f(2x5) = 2f(5)$

Cadre géométrique : registre graphique

Les points représentatifs de la fonction linéaire **$f(x) = \frac{2}{3}x$** sont situés sur une droite.

La droite passe par l'**origine**.



Proportionnalité et propriété de Thalès

Soit les triangles ABC et AB'C' tels que (B'C') // (BC)
D'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Si AB' = 2AB
alors B'C' = 2BC et AC' = 2AC

2 est le **rapport d'agrandissement** entre AB'C' et ABC
$\frac{1}{2}$ est le **rapport de réduction**.